Supongamos, por el contrario, que $f'(c) = 0$.
Puesto que f^{-1} es derivable en $d = f(c)$ y f es derivable en c entonces $f^{-1} \circ f$ es derivable en c y, de acuerdo con la Regla de la Cadena,

$$(f^{-1} \circ f)'(c) = (f^{-1})'(f(c)) \cdot f'(c) = (f^{-1})'(d) \cdot 0 = 0.$$

Pero $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, de modo que

$$(f^{-1} \circ f)'(c) = 1.$$

La contradicción viene de suponer que $f'(c) = 0$.
Es así que ha de ser $f'(c) \neq 0$. ▨

Ilustremos el teorema con un ejemplo sencillo:
Sea $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Entonces f es invertible y $f^{-1}(y) = y^{1/3}$, $y \in \mathbb{R}$.
Además, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 3x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Si f^{-1} es derivable en $y = f(x)$ entonces, dado que

$$x = f^{-1}(f(x)),$$

vale que

$$1 = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (f^{-1})'(y) f'(f^{-1}(y)).$$

Por tanto

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ siempre que } f'(f^{-1}(y)) \neq 0.$$

Obtenemos que $f'(f^{-1}(y)) = f'(y^{1/3}) = 3y^{2/3} \neq 0$ si $y \neq 0$. Así si $y \neq 0$ entonces

$$(y^{1/3})' = \frac{1}{3y^{2/3}} = \frac{1}{3} y^{-2/3}.$$